



Provas de Acesso ao Ensino Superior  
Concurso Especial de Acesso e Ingresso do Estudante Internacional

**PROVA MODELO DE MATEMÁTICA**

---

Tempo para realização da prova: 2 horas

Tolerância: 30 minutos

Material admitido: *material de escrita e calculadora científica sem capacidade gráfica*

---

**INDICAÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA**

Apresente de forma clara o seu raciocínio, indicando todos os cálculos que efetuar e todas as justificações que considerar necessárias.

A avaliação incidirá sobre a qualidade das justificações, o rigor dos cálculos apresentados e a precisão dos resultados.

Nas aproximações numéricas, quando necessárias, deve ser usada a aproximação às centésimas.

Será atribuída a cotação de 0 (zero) valores às respostas com letra ilegível.

**GRELHA DE COTAÇÃO DA PROVA**

QUESTÕES	COTAÇÃO (valores)
1. ....	3
2. ....	3
3. ....	4
4. ....	3
5. ....	4
6. ....	3
<b>Total</b>	<b>20</b>

## FORMULÁRIO

<p><b><u>GEOMETRIA NO PLANO E NO ESPAÇO</u></b></p> <p><b>Perímetro de um círculo:</b> <math>2\pi r</math> (<math>r</math> – raio)</p> <p><b>Área de um sector circular:</b> <math>\frac{\alpha r^2}{2}</math> (<math>\alpha</math> – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; <math>r</math> – raio)</p> <p><b>Área de um polígono regular:</b> <i>Semiperímetro</i> <math>\times</math> <i>Apótema</i></p> <p><b>Área de um paralelogramo:</b> <i>Base</i> <math>\times</math> <i>Altura</i></p> <p><b>Área de um trapézio:</b> <math>\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura</math></p> <p><b>Volume de um prisma e de um cilindro:</b> <i>Área da base</i> <math>\times</math> <i>Altura</i></p> <p><b>Volume de uma pirâmide e de um cone:</b> <math>\frac{Área\ da\ base \times Altura}{3}</math></p> <p><b>Volume de uma esfera:</b> <math>\frac{4\pi r^3}{3}</math> (<math>r</math> – raio)</p>	<p><b><u>FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL</u></b></p> <p><b>Regras de derivação:</b></p> <p><math>(u \pm v)' = u' \pm v'</math></p> <p><math>(u v)' = u' v + u v'</math></p> <p><math>\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}</math></p> <p><math>(\sin u)' = u' \cos u</math></p> <p><math>(\cos u)' = -u' \sin u</math></p> <p><math>(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}</math></p> <p><math>(u^n)' = n u^{n-1} u'</math> (<math>n \in \mathbb{R}</math>)</p> <p><math>(e^u)' = u' e^u</math></p> <p><math>(a^u)' = u' a^u \ln a</math> (<math>a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}</math>)</p> <p><math>(\ln u)' = \frac{u'}{u}</math></p> <p><math>(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}</math> (<math>a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}</math>)</p>
<p><b><u>NÚMEROS COMPLEXOS</u></b></p> <p><b>Potenciação:</b> <math>(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}</math></p> <p><b>Radiciação:</b> <math>\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}</math> (<math>k \in \{0, \dots, n-1\}</math> e <math>n \in \mathbb{N}</math>)</p>	<p><b>Limites notáveis:</b></p> <p><math>\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e</math> (<math>n \in \mathbb{N}</math>)</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1</math>; <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0</math>; <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty</math> (<math>p \in \mathbb{R}</math>)</p>
<p><b><u>SUCESÕES DE NÚMEROS REAIS</u></b></p> <p><b>Soma dos <math>n</math> primeiros termos de uma progressão aritmética (<math>u_n</math>):</b> <math>\frac{u_1 + u_n}{2} \times n</math></p> <p><b>Soma dos <math>n</math> primeiros termos de uma progressão geométrica (<math>u_n</math>):</b> <math>u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}</math></p>	<p><b>Fórmula resolvente de uma equação do 2.º grau da forma <math>ax^2 + bx + c = 0</math>:</b></p> $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
<p><b><u>ESTATÍSTICA</u></b></p> <p><b>Soma dos quadrados dos desvios em relação à média:</b></p> $SS_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$	<p><b>Desvio padrão:</b></p> $S_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}}$
<p><b>Percentil de ordem <math>k</math> (dados simples):</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Se <math>k = 100</math>, <math>P_k =</math> valor máximo da amostra;</li> <li>○ Se <math>k \neq 100</math> e <math>\frac{kn}{100} \in \mathbb{Z}</math>, <math>P_k = \frac{x_{\left(\frac{kn}{100}\right)} + x_{\left(\frac{kn}{100} + 1\right)}}{2}</math>;</li> <li>○ Nos restantes casos, <math>P_k = x_{\left[\frac{kn}{100}\right] + 1}</math>, onde <math>\left[\frac{kn}{100}\right]</math> representa a parte inteira de <math>\frac{kn}{100}</math>.</li> </ul>	<p><b>Coeficiente de correlação linear:</b></p> $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{SS_x SS_y}}$
<p><b>Retas dos mínimos quadrados <math>y = ax + b</math>:</b></p> $a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{SS_x} \quad e \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$	

1. Considere os números complexos que se seguem:

$$z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, \quad z_2 = 7e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{e} \quad z_3 = 2e^{i\theta}.$$

1.1. Escreva  $z_1$  na forma trigonométrica.

1.2. Determine uma expressão geral para os valores de  $\theta$  para os quais  $z_2 \times z_3$  é um número real negativo.

2. Considere as duas sucessões que se seguem:

$$100, 200, 300, \dots \quad \text{e} \quad 100, 110, 121, \dots.$$

2.1. Indique, justificando, qual das sucessões é uma progressão aritmética e qual é uma progressão geométrica.

2.2. Compare o crescimento das duas sucessões, justificando, qual delas cresce mais depressa.

2.3. Calcule a soma dos primeiros 60 termos de cada sucessão.

3. Considere a seguinte função real de variável real:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\ln x), & \text{se } x \geq 1 \\ x^4 - 2x^2 + 1, & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

3.1. Verifique se a função  $f$  é contínua em  $x = 1$ .

3.2. Estude os intervalos de monotonia e a existência de extremos da função  $f$  no intervalo  $] -\infty, 1[$ .

3.3. Estude o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão do gráfico da função  $f$  no intervalo  $] -\infty, 1[$ .

4. Considere, num referencial o.n., o triângulo de vértices A(3,8), B(2,1) e C(7,6).

4.1. Classifique o triângulo quanto à medida de comprimento dos lados e calcule o seu perímetro.

4.2. Determine a equação reduzida da reta que passa pelos pontos A e B.

5. De entre os 30 melhores alunos da Escola Secundária “Ases da Matemática”, 10 por cada ano de escolaridade, será escolhida, ao acaso, uma comissão de 4 alunos que irá representar a escola nos “Jogos sem Fronteiras da Matemática”. Calcule a probabilidade de:

5.1. A comissão ter um, e um só, aluno do 10.º ano;

**5.2.** Cada ano de escolaridade (10.º, 11.º e 12.º) estar representado na comissão;

**5.3.** A comissão ter no máximo dois alunos do 12.º ano.

**6.** Vinte e cinco alunos da turma  $\text{B}$  do 12.º ano da Escola Secundária “Ases da Matemática” foram submetidos a um teste para avaliar os conhecimentos adquiridos sobre o tema Estatística. As classificações obtidas, arredondadas às unidades, foram as seguintes:

16 12 15 14 15 20 11 18 18 13 12 13 11  
14 15 13 15 14 14 15 18 17 20 11 19

**6.1.** Construa uma tabela de distribuição de frequências para as classificações, onde figure as frequências absolutas, as frequências relativas e as frequências relativas acumuladas.

**6.2.** Qual é a percentagem de alunos que obtiveram uma classificação inferior ou igual a 18 e superior a 15?

**6.3.** Determine a média e o desvio padrão, com aproximação às centésimas, das classificações.

**6.4.** Determine os quartis das classificações.