Exame de Matemática

Tempo para realização da prova: 2 horas
Tolerância: 30 minutos

Material admitido: *material de escrita e uma calculadora científica sem capacidade gráfica*

A prova é constituída por duas partes, designadas por Parte I e Parte II.

- **A Parte I** inclui 7 questões de escolha múltipla.

– Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais apenas uma está correta.

– Se apresentar mais do que uma resposta ou se a resposta for ilegível, a questão será anulada.

– Não apresente cálculos nem justificações neste grupo de questões.

– Escreva na folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que considera correta.

- **A Parte II** inclui 6 questões de resposta aberta.

– Nas questões desta parte, apresente de forma clara o seu raciocínio, indicando todos os cálculos que efetuar e todas as justificações que considerar necessárias.

– Nas aproximações numéricas, quando necessárias, deve ser usada a aproximação às centésimas.

– A avaliação incidirá sobre a qualidade das justificações e tipo de cálculos apresentados, para além do grau de acerto atingido, por cada resposta dada.

GRELHA DE COTAÇÃO DA PROVA

QUESTÕES	COTAÇÃO (valores)
PARTE I	
1. ………………………………………………………………	1
2. ………………………………………………………………	1
3. ………………………………………………………………	1
4. ………………………………………………………………	1
5. ………………………………………………………………	1
6. ………………………………………………………………	1
7. ………………………………………………………………	1
TOTAL DA PARTE I	**7**
PARTE II	
1.1………………………………………………………………………………………	0,9
1.2………………………………………………………………………………………	0,6
2.1………………………………………………………………………………………	1,0
2.2 ………………………………………………………………………………………	1,0
3.1 ………………………………………………………………………………………	1,4
3.2 ………………………………………………………………………………………	1,6
4.1 ………………………………………………………………………………………	1,0
4.2………………………………………………………………………………………	1,1
4.3………………………………………………………………………………………	0,9
5.1………………………………………………………………………………………	1,3
5.2 ………………………………………………………………………………………	0,7
6.1 ………………………………………………………………………………………	0,7
6.2 ………………………………………………………………………………………	0,8
TOTAL DA PARTE II	**13**
TOTAL DA PROVA	**20**

FORMULÁRIO

NÚMEROS

Valor aproximado de π (pi): 3,14159

GEOMETRIA

Perímetro do círculo**:** $2\,\pi\,r$, sendo r a medida do raio do círculo

Áreas

Paralelogramo: $Base \times Altura$

Losango: $\frac{Diagonal\ maior\ \times\ Diagonal\ Menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior\ +\ Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono Regular: $\frac{Perímetro}{2} \times Altura$

Círculo: $\pi\,r^2$, sendo r a medida do raio do círculo

Superfície esférica: $4\,\pi\,r^2$, sendo r a medida do raio da esfera

Volumes

Prisma e cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$

Pirâmide e cone: $\frac{Área\ da\ base\ \times\ Altura}{3}$

Esfera: $\frac{4\pi r^3}{3}$, sendo r a medida do raio da esfera

ÁLGEBRA

Fórmula resolvente de uma equação do 2º grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

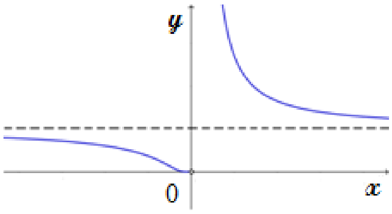
TRIGONOMETRIA

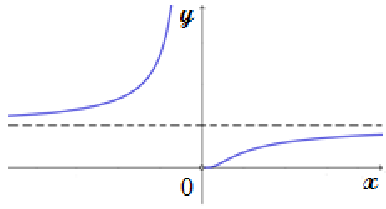
Fórmula fundamental: $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$

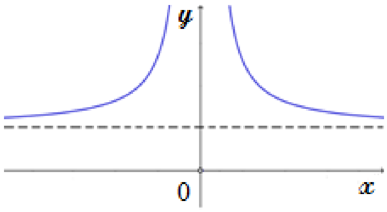
Relação da tangente com o seno e o cosseno: $tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$

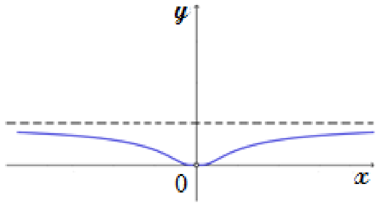
Parte I

1. Seja $f: \Re\backslash\{0\} \rightarrow \Re$ a função definida por $f(x) = 2\,e^{-\frac{1}{x}}$. Qual dos gráficos seguintes pode ser o gráfico de f?

A) 

C) 

B) 

D) 

2. Considere as seguintes igualdades:

(I) $\sqrt[3]{-|x|} = -\left|\sqrt[3]{x}\right|$; (II) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[7]{x}$; (III) $\sqrt{\sqrt{x}} = x$; (IV) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^9}} = |x|$;

Qual das seguintes opções é correta para todo $x \in \Re^+$?

A) Só a I e II

B) Só a II e III.

C) Só a I e III.

D) Só a I e IV.

3. O valor da expressão $log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt[4]{128} \div \sqrt{8}\right)$ é:

A) $log_{\frac{1}{2}} 2$.

B) $-\frac{1}{4}$.

C) $\frac{1}{4}$.

D) $-log_{\frac{1}{2}} 2$.

4. O conjunto solução da inequação:

$$\frac{2x^2}{x^2 - 4} > \frac{2}{x + 2}$$

é:

A) $]-2, 2[$

B) $]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

C) $]-2, 1[$

D) $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

5. Seja (u_n) a sucessão cujo termo geral representa o perímetro dos quadrados de ordem *n* da sequência representada na Figura 1.

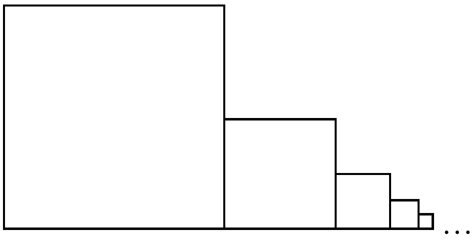


Figura 1

O primeiro quadrado da sequência tem lado 4, sendo os quadrados subsequentes construídos de modo que o lado de cada um é $\frac{3}{4}$ do lado do quadrado anterior. Nessas condições, o termo geral da sucessão (u_n) é:

A) $4\,\frac{3^{n-1}}{4^{n-1}}$

B) $\frac{3^{n-1}}{4^{n-3}}$

C) $4\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$

D) $\frac{3^{n-1}}{4^{n-2}}$

6. De uma função *f* sabe-se que:

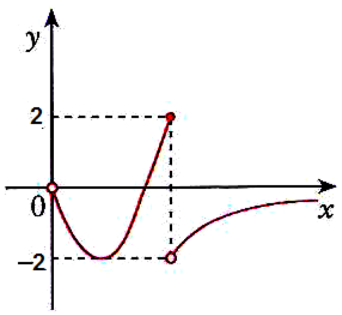
I) $D_f = \Re^+$

II) O contradomínio da função *f* é o intervalo [-2, 2].

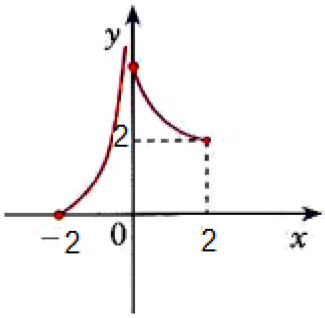
III) A equação $f(x) = 1$ admite uma, e uma só, solução.

Uma possível representação gráfica de *f* é:

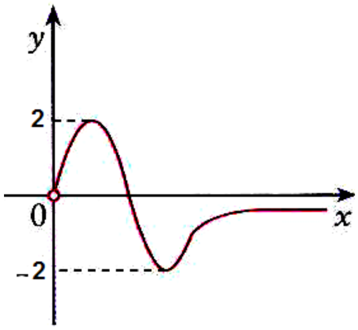
A)



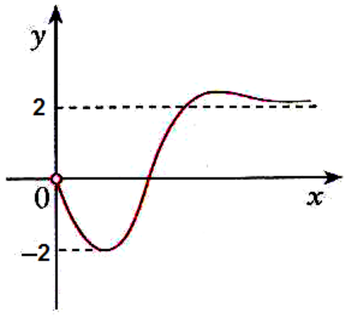
C)



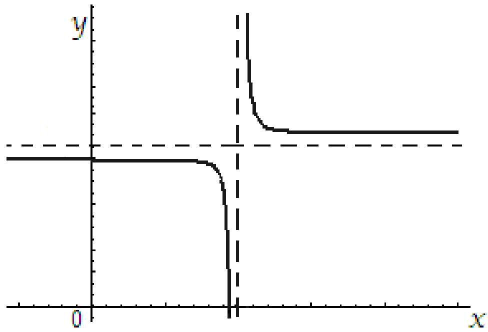
B)



D)

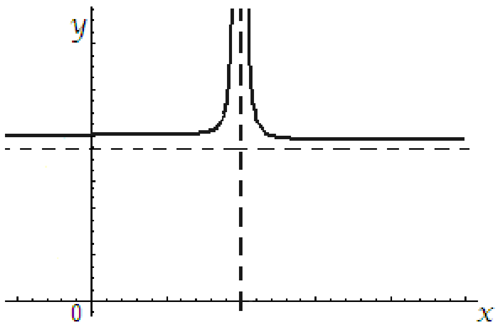


7. Seja f a função real de variável cujo gráfico é:

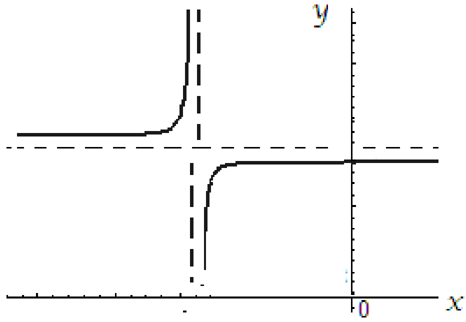


Então, o gráfico de $f(-x)$ é:

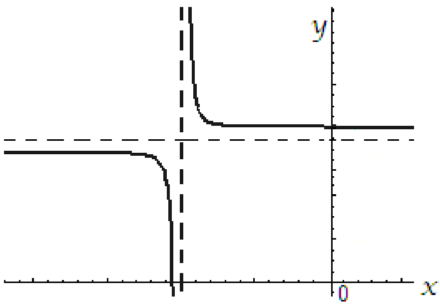
A)



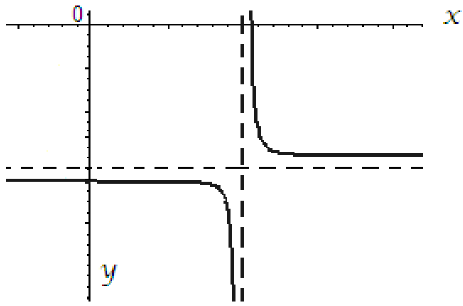
C)



B)



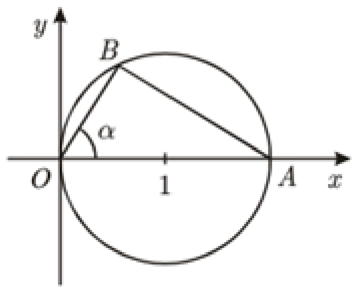
D)



Parte II

1. Na figura seguinte, estão representados num referencial o.n. xOy, uma circunferência e o triângulo $[OAB]$. Sabe-se que:

- a circunferência tem diâmetro $[OA]$;
- o ponto A tem coordenadas (2,0);
- o vértice O do triângulo $[OAB]$ coincide com a origem do referencial;
- o ponto B desloca-se ao longo da semicircunferência superior.



Para cada posição do ponto B, seja α a amplitude do ângulo AOB, com $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

1.1. Mostre que o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α, por

$$f(\alpha) = 2(1 + cos\alpha + sen\alpha);$$

1.2. Determine a área máxima do triângulo $[OAB]$, indicando o respetivo valor de α.

2. Numa certa zona de cultivo, foi detetada uma doença que atinge as culturas. A área afetada pela doença começou por alastrar durante algum tempo, tendo depois começado a diminuir.
Admita que a área, em hectares, afetada pela doença, é dada, em função de t, por

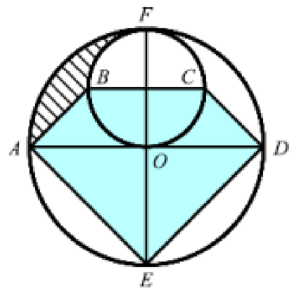
$$A(t) = -\frac{1}{5}t^2 + 2t + 5$$

sendo t $(0 \leq t < 12)$ o tempo, em semanas, decorrido após ter sido detetada essa doença.
Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, as seguintes alíneas.

2.1. Determine a área máxima afetada pela doença. Apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.

2.2. Quantas semanas decorreram até que a área afetada pela doença foi de 3,95 hectares.

3. Na figura ao lado estão representadas duas circunferências: uma de centro O, de que [AD] e [FE] são dois diâmetros perpendiculares; outra de que [BC] e [FO] são dois diâmetros, também perpendiculares. Supondo que $\overline{AO} = 4$.



3.1. Calcule a área do pentágono [BAEDC];

3.2. Mostre que a área da região tracejada é igual a $3(\pi - 2)$.

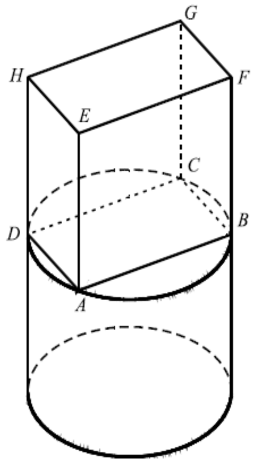
4. Considere num referencial ortonormado de origem O, os pontos A(10,-8), B(-1,5) e C(-6,4). Determine sem aproximações:

4.1. A amplitude do ângulo BOC;

4.2. As coordenadas de um vetor $\vec{u}$ perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AC}$, tal que $||\vec{u}|| = 10$;

4.3. Uma equação da circunferência que tenha [AB] por diâmetro.

5. A figura ao lado representa um sólido que se pode decompor num cubo e num cilindro reto.



Sabe-se que:

• A base superior do cilindro está contida no plano ABC;

• A face inferior do cubo está inscrita na base superior do cilindro;

• A altura do cilindro e a aresta do cubo são iguais;

• O volume total do sólido é igual a $32(\pi + 2)$.

5.1. Mostre que a aresta do cubo é 4 e que o diâmetro da base do cilindro é $4\sqrt{2}$;

5.2. Calcule a área lateral do cilindro.

6. Numa empresa, metade dos trabalhadores são do sexo feminino.

6.1. A terça parte das trabalhadoras dessa empresa é licenciada. Escolhendo, ao acaso, um funcionário da empresa, qual é a probabilidade de esse funcionário ser uma mulher licenciada?

6.2. Um quarto dos trabalhadores da empresa são homens licenciados. Escolhendo, ao acaso, um homem que trabalhe nessa empresa, qual é a probabilidade de ele ser licenciado?

FIM